

COUCHE LIMITE AVEC REACTION DE SURFACE: EXTENSION DE LA METHODE DE ROSNER AU CAS COMPRESSIBLE A GRADIENT THERMIQUE. APPLICATION AU JET PARIETAL

A. GARO et M. LEDOUX

Laboratoire de Thermodynamique, L.A.C.N.R.S. No. 230, Faculté des Sciences des Techniques de Rouen,
B.P. 67, 76130 Mont-Saint-Aignan, France

(Reçu le 20 janvier 1980 et sous forme révisée le 10 juin 1981)

Résumé—Rosner a proposé une méthode quasi-stationnaire pour le calcul des concentrations pariétales d'un effluent diffusant dans la couche limite développée au-dessus d'une plaque plane, dans des conditions d'écoulement isotherme incompressible. Cette méthode est étendue ici à un écoulement compressible à gradient de température pour un écoulement potentiel uniforme. Des solutions sont également données pour un jet pariétal non-isotherme. Dans ce dernier cas, une nouvelle équation intégrale est donnée sous une forme adimensionnelle et résolue. Dans tous les cas des courbes adimensionnelles sont données pour divers ordres de réaction.

NOMENCLATURE

C ,	fraction massique de l'effluent;
d ,	distance du bord d'attaque de la plaque au jet;
D ,	coefficient de diffusion de l'effluent dans le fluide vecteur;
f ,	fonction de courant adimensionnelle;
g ,	fonction d'Eckert (équation 15);
J_w ,	densité de flux massique pariétale de l'effluent;
k ,	coefficient de cinétique pariétale;
l ,	paramètre (équation 45);
L ,	diamètre du brûleur et de la flamme plate; diamètre de l'orifice générateur du jet;
m ,	fraction massique réduite, $m = C/C_e$;
M ,	fonction auxiliaire (17a);
n ,	ordre de la réaction pariétale;
R_x ,	nombre de Reynolds, $R_x = U_e x / \nu$;
Sc ,	nombre de Schmidt, $Sc = \nu / D$;
St ,	nombre de Stanton;
u, v ,	composants de la vitesse, respectivement parallèle et perpendiculaire à la plaque;
x, y ,	coordonnées, respectivement distance au bord d'attaque et normale à la paroi;
\bar{x} ,	distance de l'orifice à l'injection dans le cas du jet pariétal;
\bar{z}, \tilde{z}, z ,	variables synthétiques adimensionnelles définies respectivement par (12b), (37) et (57b).

Indices

e ,	dans l'écoulement potentiel;
iso ,	relatif aux problèmes de transferts à force $(C_e - C_w)$ constante;
w ,	à la paroi.

1. INTRODUCTION

LES PROBLEMES posés par l'introduction d'une paroi catalytique dans un écoulement réactif intéressent différents domaines de la technique depuis de nombreuses années. Citons par exemple le génie chimique, la biologie (transferts liquides—gaz au voisinage d'une membrane). Les phénomènes de rentrée atmosphérique ont été longtemps à la base d'un grand nombre de publications. Enfin, plus récemment, les spécialistes de l'environnement ont mis l'accent sur l'importance de l'interaction entre les couches limites atmosphériques de diffusion de polluants (SO_2 , fluor) et la végétation.

Il est remarquable que, pour des situations aussi diverses, les équations fondamentales de bilan décrivant les phénomènes sont formellement identiques. Dans la pratique, les écoulements turbulents sont la règle. Toutefois, et en particulier pour les écoulements à haute température ou faible densité, les études en régime laminaire restent d'un grand intérêt.

Un des résultats les plus importants que l'on cherche à retirer d'une étude de l'interaction entre paroi et fluide réactifs est la répartition pariétale de concentrations des espèces réagissantes.

A partir du moment où la cinétique pariétale est connue, la donnée des concentrations de paroi est équivalente à celle des flux. A l'inverse, il est possible, à travers ces calculs et des mesures de concentrations pariétales, de remonter à une mesure des cinétiques: les résultats de l'étude théorique présentée ici ont été utilisés pour la détermination de la recombinaison du radical OH sur une paroi de quartz placée dans une flamme CH_4-O_2 sous 25 torrs.

Symboles grecs

η ,	variables de Lees–Dorodnitsyn (équation 22);
$\delta, \delta^*, \delta^{**}$,	épaisseurs de diffusion;
ξ ,	variable de Lees–Dorodnitsyn (équation 22);
μ ,	viscosité dynamique du fluide vecteur;
ν ,	viscosité cinématique du fluide vecteur;
ρ ,	masse volumique du fluide vecteur.

De nombreux auteurs ont présenté des méthodes de résolution des équations de la couche limite réactive. Actuellement, ces méthodes conduisent le plus souvent à des résolutions numériques. Dans ce cas, le calcul doit être répété à chaque nouvelle situation expérimentale. Nous pensons, à cet égard, que les méthodes analytiques, plus limitées dans leur application, gardent encore le mérite d'une certaine généralité. Il est donc utile de les développer autant que possible.

De nombreuses théories du transfert pariétal utilisent les résultats du transfert à "force constante". (Ce terme est utilisé comme traduction de l'expression utilisée par Rosner [1] "driving force", qui revient à C_e et C_w constants).

Parmi ces auteurs, Frank Kamenetskii [2] conserve dans le cas d'une concentration pariétale variable $C_w(x)$ l'expression du coefficient de convection. C'est une approximation d'autant plus valable qu'on s'éloigne du bord d'attaque (où C_w tend asymptotiquement vers une valeur constante) mais qui peut se révéler particulièrement fautive aux faibles abscisses. Chambre et Acrivos [3] ont proposé une méthode de superposition qui conduit, dans le cas de la plaque plane, à une opération intégrale de Volterra du second ordre. Différentes méthodes de solution ont été données pour cette équation, notamment par Chung [4], Lassau [5] et l'un des auteurs de cet article [6]. L'analogie, moyennant certaines conditions restrictives, des transferts de chaleur et de masse a été aussi utilisée pour résoudre ce type de problème [5-8]. Toutes ces méthodes sont basées sur un même schéma : (a) calculer le flux pariétal pour une répartition donnée de la concentration pariétale $C_w(x)$; (b) exprimer que ce flux pariétal est le fruit d'une réaction localisée à la paroi : cette donnée est la plupart du temps exprimée sous la forme d'une équation de cinétique chimique.

Rosner a utilisé une méthode de ce type dans le cas d'une plaque plane plongée dans un écoulement potentiel uniforme et isotherme. C'est cette méthode que l'on a étendu ici au cas d'un écoulement compressible non isotherme. Les problèmes posés par un écoulement potentiel uniforme et un jet pariétal seront envisagés successivement.

Nous allons auparavant rappeler les grandes lignes de la méthode telle que l'a présentée Rosner, quoique sous une forme un peu différente.

Dans tout ce qui suit, les bilans sont écrits pour un seul réactif en faible concentration dans l'écoulement potentiel. Ceci n'implique pas l'absence d'autres effluents, mais simplement que les réactions éventuelles de l'espèce considérée ici avec les autres composants du fluide vecteur n'ont pas d'influence notable sur les bilans.

2. LA METHODE QUASI-STATIONNAIRE DE ROSNER

Le système d'équations décrivant les transferts dans la couche limite développée au-dessus d'une plaque plane s'écrit :

Continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

Impulsion :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (2)$$

Continuité de l'espèce :

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}. \quad (3)$$

Ce système s'assortit des conditions aux limites :

$$y \rightarrow \infty, \quad u = U_e, \quad \frac{dU_e}{dx} = 0; \quad (4a)$$

$$C = C_e, \quad \frac{dC_e}{dx} = 0; \quad (4b)$$

$$y = 0, \quad u = v = 0; \quad (4c)$$

$$J_w = \rho D \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_w = -k(\rho C_w)^n. \quad (4d)$$

Ces équations sont écrites pour un fluide à propriétés physiques constantes en l'absence de gradients de pression longitudinaux. Equation (4d) exprime la disparition de l'effluent à la paroi par l'intermédiaire d'une réaction chimique d'ordre n (le problème de la création pariétale de cet effluent est symétrique du présent problème et est susceptible du même traitement).

$C_w(x)$ est la fonction inconnue que nous cherchons ici. L'intégration de (3) sur y entre 0 et l'infini donne :

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \delta^* \frac{d}{dx} \ln [U_e(C_e - C_w)] = St(x) \quad (5)$$

$$\delta^{**}(x) = \int_0^\infty \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{C - C_w}{C_e - C_w} \right) dy \quad (6)$$

et

$$St(x) = \frac{J_w(x)}{\rho_e U_e (C_e - C_w)} \quad (7)$$

est un nombre de Stanton.

La méthode de Rosner comporte trois étapes.

(1) La théorie du transfert à force $(C_e - C_w)$ constante est utilisée pour exprimer la relation entre le nombre de Stanton $St_{iso}(x)$ et $\delta_{iso}^{**}(x)$. Dans tout ce qui suit, l'indice iso désigne des quantités et des résultats relatifs au problème à force $(C_e - C_w)$ constante.

Dans ce cas, $St_{iso}(x)$ est donné par :

$$St_{iso}(x) = \Theta_1 R_x^{-1/2} S_c^{-1} \quad (8a)$$

où

$$\Theta_1 = 0,332 S_c^{1/3}. \quad (8b)$$

C'est l'analogie du résultat de Polhausen [9].

D'après (8) la relation entre St_{iso} et δ_{iso}^{**} est donnée par :

$$St_{iso}(x) = \frac{2\Theta_1^2 x}{S_c^2 R_x \delta_{iso}^{**}}. \quad (9)$$

(2) Quand $(C_e - C_w)$ varie avec x , δ^{**} et St sont bien entendu différents de δ_{iso}^{**} et St_{iso} . Néanmoins, on suppose que la relation (9) reste valable. Cette *approximation quasi-stationnaire* est bien plus logique que celle de Frank-Kamenetskii en ce sens que l'on relie ici des valeurs intégrales (dépendant de tout le comportement de la couche limite) et non des valeurs locales.

Le nombre de Stanton est tiré de (5) et (9)

$$St(x) = \frac{\Theta_1}{Sc} \sqrt{\frac{x}{R_x}} U_c (C_e - C_w) \times \frac{1}{\left[\int_0^x U_c^2 (C_e - C_w)^2 dx \right]}. \quad (10)$$

(3) En exprimant que le flux massique pariétal $J_w(x)$ est le résultat d'une réaction d'ordre n , l'équation intégrale suivante est trouvée

$$m_w^n = (1 - m_w)^2 \left[\int_0^{\bar{z}} (1 - m_w)^2 \cdot d\bar{\xi} \right]^{-1/2}. \quad (11)$$

Cette équation a été mise sous forme adimensionnelle grâce à l'usage des variables:

$$m_w = \frac{C_w}{C_e}. \quad (12a)$$

et

$$\bar{z} = \left[\frac{k(\rho C_e)^{n-1}}{D} \sqrt{\frac{v}{U_e}} \cdot \frac{1}{\Theta_1} \right]^2 x. \quad (12b)$$

Elle s'assortit de la condition aux limites

$$\bar{z} = 0; \quad m_w = 1. \quad (13)$$

Les équations (11) et (13) permettent le calcul des concentrations pariétales pour tous les ordres de réactions et conditions aérothermiques. En effet elles utilisent la variable synthétique \bar{z} qui contient l'information sur la dynamique et la cinétique chimique.

Des solutions analytiques de (11) peuvent être données pour différentes valeurs de n :

pour $n = 0$ (flux constant)

$$\bar{z} = 2(1 - m_w)^2; \quad (14a)$$

pour $n = 1$

$$\bar{z} = \ln m_w^2 + \frac{1 - m_w^2}{m_w^2}; \quad (14b)$$

pour $n = \frac{1}{2}$

$$\bar{z} = -3(1 - m_w) + \frac{1 - m_w}{m_w} + \ln \frac{1}{m_w^2}; \quad (14c)$$

pour une valeur quelconque de n :

$$\bar{z} = \frac{n-2}{n-1} \left(\frac{1 - m_w^{2n-2}}{m_w^{2n-2}} \right) - 4 \frac{n-1}{2n-1} \times \left(\frac{1 - m_w^{2n-1}}{m_w^{2n-1}} \right) + \frac{1 - m_w^{2n}}{m_w^{2n}}. \quad (14d)$$

Quelques courbes représentatives de $m_w(z)$ sont données sur la Fig. 1.

Cette méthode a déjà été étendue par l'un des auteurs de cet article au cas d'un échelon de catalyse [10]. Eckert [11] a montré (pour un échelon de température pariétale $x_0 \cdot C_e$ résultat est ici transposé au cas de la diffusion de matière) que le nombre de Stanton peut se mettre sous la forme:

$$St_{iso}(x) = \Theta_1 R_x^{-1/2} S_c^{-1} g \left(\frac{x_0}{x} \right). \quad (15)$$

L'application de la méthode en 3 étapes précédemment décrite conduit à [10]:

$$m_w^n = \frac{(1 - m_w)^2 M(\bar{z}, \bar{z}_0)}{\left\{ 2 \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} M(\bar{z}, s) (1 - m_w^2) d\bar{s} \right\}^{1/2}}. \quad (16)$$

La fonction auxiliaire $M(z, z_0)$ est donnée par

$$M(\bar{z}, \bar{z}_0) = \frac{g \left(\frac{\bar{z}_0}{\bar{z}} \right)}{\sqrt{\bar{z}}} \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} g \left(\frac{\bar{z}_0}{\bar{\xi}} \right) \frac{d\bar{\xi}}{\sqrt{\bar{\xi}}} \quad (17a)$$

où

$$\bar{z}_0 = \bar{z}(x_0). \quad (17b)$$

Cette équation (16) peut être résolue numériquement.

Cette méthode de résolution est à ce niveau limitée dans son application par l'hypothèse très restrictive d'un écoulement à propriétés physiques constantes. Dans un premier temps, nous allons donc devoir étendre cette méthode au cas d'un écoulement compressible non isotherme au-dessus d'une plaque plane.

3. ECOULEMENT POTENTIEL UNIFORME. FLUIDE COMPRESSIBLE NON ISOTHERME

Nous allons ici calculer les concentrations pariétales d'un effluent transporté par un écoulement potentiel

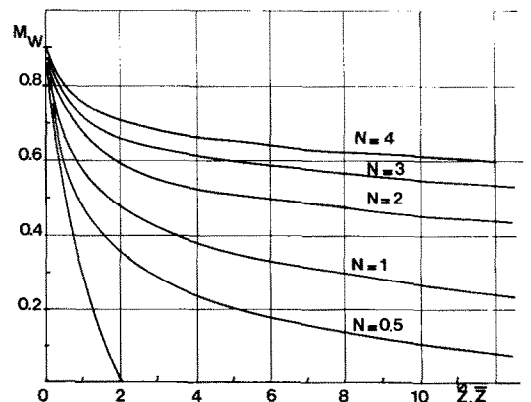


FIG. 1. Solution des équations (11) et (38).

parallèle uniforme au-dessus d'une plaque catalytique moyennant les hypothèses suivantes :

—La vitesse d'écoulement potentiel est constante (pas de gradient de pression).

—La température peut varier dans la couche limite, mais est constante dans l'écoulement potentiel. Ainsi, ρ_e et μ_e sont des constantes.

—Le rapport $\rho\mu/\rho_e\mu_e$ reste constant et égal à 1 dans la couche limite. Cette hypothèse est valable dans de nombreux cas pratiques.

—Les réactions chimiques ne sont pas suffisamment exo (ou endo)-thermiques pour affecter les profils de température. Le problème thermique est d'ailleurs supposé résolu ici : on se donne $T(x, y)$, donc $\rho(x, y)$ et $\mu(x, y)$.

Le transfert thermique détermine les propriétés du fluide, mais il n'y a pas de contre-réaction de la part de la chimie sur les profils. Cette solution du problème thermique peut provenir d'une résolution antérieure ou de mesures expérimentales.

Les équations (1) à (3) deviennent :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (18)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (19)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D \frac{\partial C}{\partial y} \right) \quad (20)$$

avec les conditions aux limites

$$y \rightarrow \infty \quad u = U_e \quad \frac{dU_e}{dx} = 0, \quad (21a)$$

$$C = C_e \quad \frac{dC_e}{dx} = 0, \quad (21b)$$

$$y = 0 \quad u = v = 0, \quad (21c)$$

$$J_w(x) = \rho D \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_w = k(\rho C_w)^n. \quad (21d)$$

Introduisons une transformation de Lees-Dorodnitsyn, comme le font Fox et Steiger [15] :

$$\xi = \int_0^x \mu_e \rho_e U_e dx, \quad (22a)$$

$$\eta = \frac{\rho_e U_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_e} dy \quad (22b)$$

ainsi que la fonction de courant réduite, f :

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (23a)$$

$$f = \frac{\psi}{\sqrt{2\xi}}. \quad (23b)$$

En l'absence de gradient de pression, une hypothèse de similarité locale peut être faite. Le système (18)–(20) devient alors :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^2} + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} + f \frac{\partial m}{\partial \eta} = 0 \quad (25)$$

assorti des conditions aux limites

$$\eta \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} \rightarrow 1; \quad (26a)$$

$$m \rightarrow 1; \quad (26b)$$

$$\eta = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \quad f = 0; \quad (26c)$$

$$\frac{\partial m}{\partial \eta} + f m = \frac{\sqrt{2\xi} C_e^{n-1} (k\rho_w)^n Sc}{\rho_e c \mu_e U_e}; \quad (26d)$$

m est une concentration réduite définie comme C/C_e .

Si nous remplaçons la condition (26d) par :

$$\eta = 0, \quad m = m_{wiso} = Ct_e. \quad (26e)$$

la solution du système est bien connue. Elle a été donnée par Polhausen. Ces solutions seront désignées par $f_{iso}(\eta)$ et $m_{iso}(\eta)$.

L'intégration de (20) sur y entre 0 et l'infini donne :

$$\frac{d\delta^*}{dx} + \delta^* \frac{d}{dx} \ln [\rho_e U_e (C_e - C_w)] = St(x) \quad (27)$$

avec

$$\delta^* = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e U_e} (1 - \gamma) dy. \quad (28)$$

où

$$\gamma = \frac{C - C_w}{C_e - C_w}. \quad (29)$$

Equation (27) est formellement identique à (5). Les effets de la température sont introduits par l'intermédiaire de la définition de δ^* ; $St(x)$ est toujours défini par (7).

δ_{iso}^* peut être exprimé sous la forme :

$$\delta_{iso}^* = \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho_e} \left(\frac{\partial f_{iso}}{\partial \eta} \right) (1 - \gamma_{iso}) dy \quad (30)$$

où

$$\gamma_{iso} = \frac{m - m_{wiso}}{1 - m_{wiso}}. \quad (31)$$

Les hypothèses et la définition de ξ et η conduisent à :

$$\xi = \rho_e \mu_e U_e x. \quad (32a)$$

$$\frac{\rho}{\rho_e} dy = \sqrt{\left(\frac{2\mu_e x}{\rho_e U_e} \right)} d\eta. \quad (32b)$$

On trouve alors :

$$\delta_{iso}^* = 2\Theta_2 \sqrt{\frac{\nu_e}{U_e}} \sqrt{x}. \quad (33a)$$

où

$$\Theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^\infty \frac{\partial f_{iso}}{\partial \eta} (1 - \gamma_{iso}) d\eta. \quad (33b)$$

Θ_2 , conformément à la théorie de Polhausen, est identique à Θ_1/Sc . La relation entre δ_{iso}^* et St_{iso} est alors trouvée quand $(C_e - C_w)$ est constant. Dans ce cas, en effet :

$$\frac{d\delta_{iso}^*}{dx} = St_{iso}(x) \quad (34)$$

ce qui donne

$$St_{iso}(x) = \frac{2\Theta_2^2 x}{R_x \delta_{iso}^*}. \quad (35)$$

Quand $(C_e - C_w)$ varie, l'approximation de quasi-stationnarité conduit à conserver (35). $St(x)$ est alors donné par :

$$St(x) = \frac{k(\rho_w C_w)^n}{\rho_e U_e (C_e - C_w)} = \frac{2 \cdot \Theta_1 x U_e (C_e - C_w)}{S_c R_x \left\{ \int_0^x [\rho_e U_e (C_e - C_w)]^2 ds \right\}^{1/2}} \quad (36)$$

Equation (36) ne diffère de (10) que par l'introduction de ρ_w . Dans de nombreux cas, il est possible de négliger l'écart de $\rho_w(x)$ par rapport à une valeur moyenne $\bar{\rho}_w$. C'est dans ce cas que nous nous placerons ici.

On peut alors définir une variable \tilde{z} par :

$$\tilde{z} = \left[\frac{k(\rho_e C_e)^{n-1}}{D} \cdot \left(\frac{\bar{\rho}_w}{\rho_e} \right)^{n-1} \sqrt{\frac{\nu_e}{U_e} \cdot \frac{1}{\Theta_1}} \right]^2 x. \quad (37)$$

L'équation donnant $m_w(\tilde{z})$ est alors :

$$m_w^n = \frac{(1 - m_w)^2}{\left[\int_0^{\tilde{z}} (1 - m_w)^2 d\tilde{s} \right]^{1/2}}. \quad (38a)$$

Cette équation est identique à (11). Ainsi les solutions données par (14) et représentées Fig. (1) peuvent être transposées à $m_w(\tilde{z})$, moyennant l'hypothèse $\rho_w \simeq \bar{\rho}_w$. De la même manière, le problème de l'échelon de catalyse pourra être résolu à l'aide de (16).

4. APPLICATION A UN JET PARIETAL

L'analyse que suit a été développée afin de résoudre un problème rencontré durant l'étude de l'interaction d'une flamme plate propane-oxygène sous 25 torrs et d'une plaque de quartz plane parallèle à l'écoulement des gaz de combustion. Ceci justifie la géométrie adaptée ici. Toutefois les résultats de notre étude sont généralisables à toutes sortes de jets pariétaux.

La Fig. 2 montre la géométrie du système. Le brûleur et la flamme plate peuvent être considérés comme un orifice délivrant un jet de gaz chauds laminaires. Son diamètre est L . La plaque plane est placée à une distance d du brûleur (d est de l'ordre de $L/10$). La distance d'un point de la plaque au bord d'attaque est désignée par x . Ainsi, la distance au brûleur de ce point est $(x + d)$.

4.1. Définition de l'écoulement potentiel

Divers auteurs ont étudié le jet pariétal dans le cas d'un orifice générateur très mince au proche voisinage de la paroi. Glauert [13] a résolu le problème dynamique pour des propriétés du fluide constantes. Riley [17] a étendu ce calcul au cas compressible pour l'utilisation d'une transformation de Lees. Le transfert de chaleur a été étudié par Bloom et Steiger [16] et Bansal et Tak [18]. La théorie de Glauert a été vérifiée expérimentalement par Bakke [19].

La géométrie du présent écoulement est plus générale que celle traitée par ces différents auteurs, mais nous allons utiliser certains de leurs résultats.

La région étudiée ici ne dépasse pas une longueur égale à 3 ou 4 D . Un profil de vitesse typique tel que représenté sur la Fig. 2 peut alors être adopté. Trois zones peuvent être distinguées dans ce profil :

- une zone de mélange (c) sur le bord du jet ;
- une zone (b) où la vitesse est pratiquement constante ;
- une couche limite au voisinage de la plaque (a).

L'hypothèse fondamentale qui sera faite ici est que la seule interaction entre les zones (c) et (a) est constituée par la valeur de la vitesse dans la région (b), appelée $U_e(x)$.

Pour déterminer $U_0(x)$, nous allons écrire la conservation de l'impulsion dans le jet. La majeure partie du flux de quantité de mouvement est contenue dans un tronç de cône dont le diamètre, en raison du développement linéaire de la zone de mélange, est proportionnel à \bar{x} . Ce que l'on peut écrire :

$$\frac{d}{d\bar{x}} (\rho_e S U_e^2) = 0 \quad (38b)$$

où

$$S = \pi \left(\frac{L}{2} + \kappa \bar{x} \right)^2, \quad (39)$$

κ est ici une constante.

L'intégration de (38) conduit à :

$$U_e(\bar{x}) = \frac{U'_0}{1 + a\bar{x}} \quad (40a)$$

où

$$a = \frac{2\kappa}{L}. \quad (40b)$$

Si d n'est pas trop différent (ou inférieur) à $L/10$, (40a) peut être transformé en :

$$U_e \sim \frac{U_0}{\sqrt{x}} \quad (41)$$

pour x différent de zéro.

Nous utiliserons cette approximation plus loin. Elle a été vérifiée expérimentalement dans un cas particulier [12].

Le problème du transfert d'une espèce contenue en concentration constante C_e dans la zone (b) va être

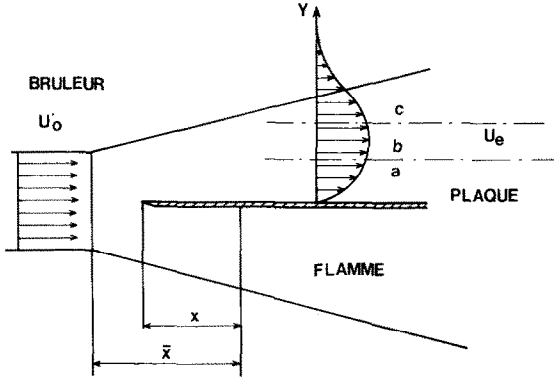


FIG. 2. Schéma du jet pariétal.

considéré maintenant. Nous ferons les hypothèses suivantes :

— T_e est constant dans la zone (b). ρ_e et μ_e sont donc constants.

— Le problème thermique, comme au §3 est considéré comme résolu. $T(x, y)$, $\rho(x, y)$ sont connus dans la zone (a).

— Le nombre de Schmidt Sc est constant. Il est égal à ν_e/D_e .

— $\rho\mu/\rho_e\mu_e$ est constant et égal à 1.

4.2. Calcul des profils de vitesse

Les équations décrivant les transports dans la couche limite sont toujours données par (18), (19) et (20). Les conditions aux limites sont données par :

$$y \rightarrow \infty, \quad u = U_e(x) \quad (42a)$$

où $U_e(x)$ est calculé d'après (41)

$$y \rightarrow \infty, \quad C = C_e, \quad \frac{dC_e}{dx} = 0; \quad (42b)$$

$$y = 0, \quad u = v = 0; \quad (42c)$$

$$\rho_w D_w \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_w = k(\rho_w C_w)^n. \quad (42d)$$

Dans un premier temps, nous devons calculer les profils de vitesse. A l'aide des variables définies par (22) et (23), le système (18) et (19) peut être transformé en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\xi}{U_e} \frac{dU_e}{d\xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\ = 2\xi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

avec les conditions aux limites

$$\eta = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \quad f = 0; \quad (43a)$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} \rightarrow 1. \quad (43b)$$

Si $U_e(x)$ suit (41), $-\xi dU_e/U_e d\xi$ prend la valeur 2. Alors une solution semblable peut être trouvée pour f ,

qui devient fonction unique de η . Equation (43) devient :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 = 0. \quad (44)$$

Glauert [13] a donné une solution de (44) sous une forme paramétrique :

$$f^0 = \rho^2 \quad (45a)$$

$$\eta = \ln \left[\frac{(1 + \rho + \rho^2)^{1/2}}{1 - \rho} \right] + \sqrt{3} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}\rho}{2 + \rho} \right) \quad (45b)$$

qui conduit à :

$$\frac{\partial f^0}{\partial \eta} = \frac{2}{3} \rho(1 - \rho^3). \quad (45c)$$

Glauert remarque également que si A est une constante, toutes les solutions de la forme Af^0 ($A\eta$) sont solutions de (43); f^0 est représenté sur la Fig. 3.

Du point de vue satisfaction des conditions aux limites, f^0 satisfait au problème défini par :

$$\eta = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \quad f = 0; \quad (43a)$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} \rightarrow 0. \quad (43c)$$

La fonction f^0 entière ne peut constituer une solution à notre problème. Une bonne approximation au profil de vitesses sera donnée par :

Pour la zone (b): $\partial f / \partial \eta(\eta) = 1$;

Pour la zone (a): la part ascendante de la fonction $f(\eta) = Af^0(A\eta)$ telle que $\partial f / \partial \eta = 1$ à son maximum.

L'aspect asymptotique du raccordement de la couche limite à la frontière est supprimé. Toutefois cette solution a donné un bon accord avec les données expérimentales [14].

La similarité locale ayant été établie, nous pouvons mettre l'équation (20) sous la forme :

$$\frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \eta^2} + f \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} = 0. \quad (46a)$$

où γ est définie par (29). f a été déterminée au § 4.2.

Les conditions aux limites peuvent s'écrire :

$$\eta \rightarrow \infty, \quad \gamma \rightarrow 1; \quad (46b)$$

$$\gamma = 0, \quad \eta = 0, \quad (46c)$$

La résolution de (46a) est alors formellement identique à celle du problème de Polhausen avec une fonction $f(\eta)$ différente.

Le gradient pariétal de γ sera donné par :

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right|_w = \frac{1}{\int_0^\infty \left(\exp - \int_0^\eta f(s) ds \right)^{Sc} d\eta}. \quad (47)$$

Le nombre de Stanton pour une concentration pariétale $C_{w\text{iso}}$ constante, St_{iso} , pourra s'écrire :

$$St_{\text{iso}}(x) = \frac{\rho_w D_w \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_w}{\rho_e U_e (C_e - C_w)} = \frac{1}{2 \cdot Sc} \left(\frac{v_e}{U_0} \right)^{1/2} x^{-1/4} \left. \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right|_w. \quad (48)$$

Dans (48), l'invariabilité de Sc et $\mu\rho$ conduit à l'égalité de D_e et de $(\rho_w/\rho_e)^2 D_w$.

$St_{\text{iso}}(x)$ peut être réécrit sous la forme :

$$St_{\text{iso}} = \Theta_3 R_x^{-1/2} = \Theta_3 \left(\frac{v_e}{U_0} \right)^{1/2} x^{-1/4}. \quad (49)$$

Le calcul de $(\partial\gamma/\partial\eta)|_w$ a été fait à partir de (47). Nous avons trouvé à partir du résultat de ce calcul que θ_3 est donné avec une très bonne approximation par :

$$\Theta_3 = 0,335 Sc^{-0,56}. \quad (50)$$

4.8. Application de la méthode quasi-stationnaire

Equation (20) étant encore valable, une épaisseur $\delta(x)$ peut être définie de la même manière que $\delta^*(x)$ dans (28) et la relation entre $\delta(x)$ et $St(x)$ sera donnée par :

$$\frac{d\delta}{dx} + \delta \frac{d}{dx} \ln [\rho_e U_e (C_e - C_w)] = St(x). \quad (51)$$

qui est identique à (27).

4.3.1. Quand $(C_e - C_w)$ est constant, mais que $U_e(x)$ varie, la relation entre St_{iso} et δ_{iso} se déduira de

$$\frac{d\delta_{\text{iso}}}{dx} + \frac{\delta_{\text{iso}}}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = St_{\text{iso}}(x). \quad (52)$$

En tenant compte de (41) et (49), δ_{iso} prend la forme :

$$\delta_{\text{iso}} = 4\Theta_3 \left(\frac{v_e}{U_0} \right)^{1/2} x^{3/4}. \quad (53)$$

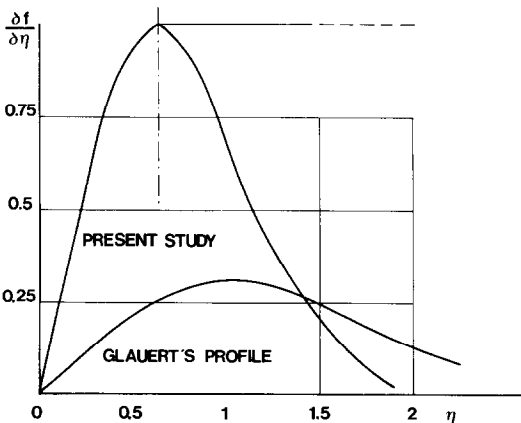


FIG. 3. Profils de vitesse dans la couche limite du jet pariétal.

Donc

$$St_{\text{iso}}(x) = \frac{4^{1/3} \cdot \Theta_3^{4/3}}{\delta_{\text{iso}}^{1/3}} \cdot \left(\frac{v_e}{U_0} \right)^{2/3}. \quad (54)$$

4.3.2. La relation (54) est conservée, suivant l'approximation quasi-stationnaire. En combinant (54) et (51), l'intégration, moyennant la condition $x = 0, \delta = 0$, nous donne :

$$\delta(x) = \frac{\left\{ \frac{4^{4/3}}{3} \Theta_3 \left(\frac{v_e}{U_0} \right)^{2/3} \int_0^x [\rho_e U_e (C_e - C_w)]^{4/3} ds \right\}^{3/4}}{\rho_e U_e (C_e - C_w)}. \quad (55)$$

Exprimons maintenant le fait que le nombre de Stanton, relié à $\delta(x)$ par (54), est également le résultat d'une réaction pariétale d'ordre n :

$$St(x) = \frac{k(\rho_w C_w)^n}{\rho_e U_e (C_e - C_w)} = \frac{3^{1/4} \cdot \Theta_3 \left(\frac{v_e}{U_0} \right)^{1/2} \{ \rho_e U_e (C_e - C_w) \}^{1/3}}{\left\{ \int_0^x [\rho_e U_e (C_e - C_w)]^{4/3} ds \right\}^{1/4}}. \quad (56)$$

Equation (56) peut être transformée en une équation intégrale adimensionnelle par l'intermédiaire des variables m et z

$$m = \frac{C_w}{C_e} \quad (57a)$$

$$z = \left\{ \frac{1}{\Theta_3 Sc} \cdot \frac{k(\rho_e C_e)^{n-1}}{D_e} \left(\frac{\rho_w}{\rho_e} \right)^n \left(\frac{v_e}{U_e} \right)^{1/2} \right\}^{4/9} x^{2/9}. \quad (57b)$$

Cette forme de z peut être comparée à (12b) et (37). Equation (56) devient alors :

$$m_w^n = \frac{(1 - m_w)^{4/3}}{z^2 \left[\int_0^z (1 - m_w)^{4/3} ds \right]^{1/4}}. \quad (58)$$

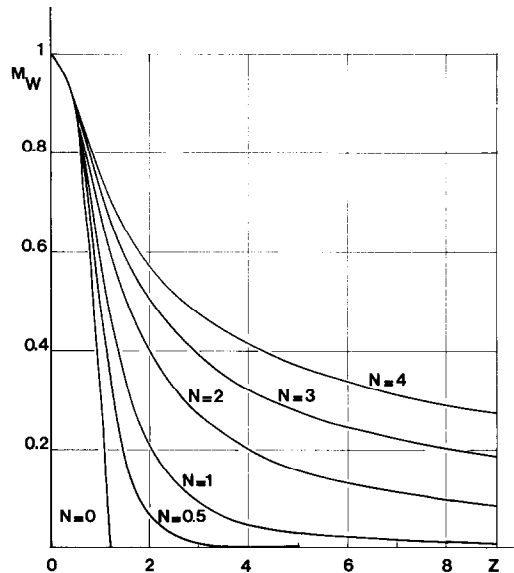


FIG. 4. Solutions de l'équation (58).

Cette équation a été résolue numériquement pour les ordres 0, 1/2, 1, 2, 3 et 4. Les résultats sont donnés dans le Tableau 1.

Remarquons que pour $n = 0$ (flux constant), une solution analytique est facilement trouvée sous la forme:

$$m_w(z) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{1/4} z^{9/4}, \tag{59}$$

Equation (59) conduit à une variation de $1 - m_w$ proportionnelle à \sqrt{x} .

5. CONCLUSION

La méthode de Rosner, telle qu'elle a été développée par son auteur, permet le calcul des fractions massiques pariétales d'un effluent diffusant dans la couche limite développée par un fluide vecteur de propriétés physiques constantes. L'écoulement potentiel n'a alors pas de gradient de pression.

Par l'introduction des variables ξ et η , nous avons prolongé cette méthode au cas compressible non-isotherme. Dans le cas d'un écoulement potentiel à gradient longitudinal de vitesse (jet pariétal), nous avons montré que cette méthode est encore applicable.

La formulation adimensionnelle du problème est un atout important de cette méthode, car elle donne des solutions universelles, valables pour toutes les cinétiques, vitesses, champs de température et nature des fluides.

Les résultats de cette étude ont en particulier permis de répondre à des questions posées lors de l'étude de l'interaction entre une flamme propane-oxygène sous 25 torrs et une plaque de quartz.

On peut aisément se rendre compte que la méthode proposée ici n'est pas limitée aux écoulements potentiels isothermes suivant uniquement des lois de vitesse telle que (41). En fait, à partir du moment où U_e , ρ_e , μ_e peuvent être exprimées en fonction d'une puissance de x , une équation intégrale du même type que (58) peut être trouvée, moyennant une définition

convenable de z . Il semble toutefois que la similarité locale soit nécessaire.

Par ailleurs, la solution de certains problèmes catalytiques peut être transposée au transfert de chaleur. En particulier, le cas du chauffage à flux constant $n = 0$: dans ce dernier cas, les solutions trouvées sont immédiatement applicables.

Enfin, des indications sont données sur l'application du calcul présenté ici au cas d'un échelon catalytique.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. E. Rosner, The apparent chemical kinetics of surface reactions in external flow systems. *A.I.Ch.E.* 9(3), 321 (1963).
2. Frank Kamenetskii, *Diffusion and heat exchange in chemical kinetics*. Princeton University Press, Princeton (1955).
3. P. L. Chambre et A. Acrivos, On chemical surface reactions in laminar boundary layer flows. *J. appl. Phys.* 27, 1322-1328 (1956).
4. P. M. Chung, Chemically reacting nonequilibrium boundary layer. *Advances in Heat Transfer*, Vol. 2, p. 109. Academic Press (1965).
5. G. Lassau, Etude d'une couche limite laminaire avec réaction chimique catalysée sur la paroi. Thèse de Doctorat ès Sciences, Paris (1967).
6. M. Ledoux et P. Valentin, Etude par simulation thermique de la couche limite de diffusion avec réaction de surface en régimes laminaire et turbulent. *Int. J. Heat Mass Transfer* 20, 961-973 (1977).
7. M. Ledoux et J. P. Lassalles, Couche limite de diffusion avec réaction d'ordre un à la paroi. *J. Chimie Physique* 9, 1322 (1973).
8. P. Goddard, Etude analogique de la réaction chimique dans la couche limite laminaire. Institut Français du Pétrole, Rapport No. 8922.
9. H. Schlichting, *Boundary layer theory*. McGraw-Hill (1968).
10. M. Ledoux, Simulation thermique d'écoulements avec réaction de surface: Etude de la couche limite de diffusion en régime laminaire et turbulent. Thèse de Doctorat ès Sciences, Rouen 12 février 1975.
11. E. A. Brun, A. Martinot Lagarde et J. Mathieu, *Mécanique des Fluides*, Vol. 3, Dunod, Paris (1970).
12. A. Garo, D. Puechberty et M. Ledoux, Study of the interaction between a quartz wall and a propane-oxygen flame under 25 torr. (To be published).

Tableau 1. Solutions de l'équation (58)

z	$n = 0.5$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
1	0.50	0.58	0.671	0.72	0.76
2	$0.605 \cdot 10^{-1}$	0.2	0.397	0.50	0.576
3	$0.92 \cdot 10^{-2}$	$0.9 \cdot 10^{-1}$	0.270	0.393	0.478
4	$0.237 \cdot 10^{-2}$	$0.476 \cdot 10^{-1}$	0.201	0.325	0.415
5	$0.834 \cdot 10^{-3}$	$0.29 \cdot 10^{-1}$	0.159	0.28	0.372
6	$0.357 \cdot 10^{-3}$	$0.189 \cdot 10^{-1}$	0.131	0.247	0.339
7	$0.17 \cdot 10^{-3}$	$0.133 \cdot 10^{-1}$	0.11	0.221	0.313
8	$0.95 \cdot 10^{-4}$	$0.98 \cdot 10^{-2}$	0.957	0.20	0.292
9	$0.55 \cdot 10^{-4}$	$0.75 \cdot 10^{-2}$	$0.84 \cdot 10^{-1}$	0.185	0.275
10	$0.31 \cdot 10^{-4}$	$0.56 \cdot 10^{-2}$	$0.73 \cdot 10^{-1}$	0.172	0.259
15	$0.5 \cdot 10^{-5}$	$0.233 \cdot 10^{-2}$	$0.476 \cdot 10^{-1}$	0.128	0.209
20	$0.14 \cdot 10^{-5}$	$0.12 \cdot 10^{-2}$	$0.345 \cdot 10^{-1}$	0.104	0.179

13. M. B. Glauert, The wall jet. *J. Fluid Mech.* 1, 625 (1956).
14. A. Garo, D. Puechberty, G. Gouesbet et M. Ledoux, Determination of velocity profiles above a thin flat plate in a low pressure flame, *Lett. Heat Mass Transfer* 7, 275–281 (1980).
15. H. Fox et M. H. Steiger, Some mass transfer effects on the wall jet. *J. Fluid Mech.* 15, 597 (1963).
16. H. Bloom et H. Steiger, Some compressibility and heat transfer characteristics of the wall jet. *Proc. Third U.S. Nat. Cong. appl. Mech.*, Brown Univ. (1958).
17. N. Riley, Effects of compressibility on a laminar wall jet. *J. Fluid Mech.* 4, 615 (1958).
18. J. L. Bansal et S. S. Tak, Temperature distribution in a laminar plane wall jet. *Proc. Indian Acad. Sci.* 83, 1 (1976).
19. P. Bakke, An experimental investigation of the wall jet. *J. Fluid Mech.* 2, 467 (1957).

BOUNDARY LAYER WITH SURFACE REACTION: EXTENSION OF THE ROSNER'S METHOD TO THE COMPRESSIBLE NONISOTHERMAL CASE. APPLICATION TO THE WALL JET

Abstract—Rosner derived a quasi-stationary method for calculation of wall mass fraction of an effluent diffusing in the boundary layer developed above a flat plane under isothermal incompressible conditions. This method has been extended here to the non-isothermal compressible case with uniform potential flow. Solutions are also given in the case of a non-isothermal wall jet. In this latter case a new integral equation is derived under non-dimensional form and solved. In these three cases, non-dimensional curves are given for several orders of reaction.

GRENZSCHICHT MIT OBERFLÄCHENREAKTION: AUSDEHNUNG DES ROSNER-VERFAHRENS AUF DEN KOMPRESSIBLEN NICHTISOTHERMEN FALL. ANWENDUNG AUF EINEN WANDSTRAHL

Zusammenfassung—Rosner entwickelte eine quasistationäre Methode zur Berechnung des Wandmassenanteils eines ausströmenden Mediums, das in die Grenzschicht über einer ebenen Fläche unter isothermen inkompressiblen Bedingungen diffundiert. Hier wird diese Methode auf den nichtisothermen kompressiblen Fall bei gleichförmiger Potentialströmung erweitert. Für einen nichtisothermen Wandstrahl werden Lösungen angegeben. Für diesen letzteren Fall wird eine neue Integralgleichung in dimensionsloser Form entwickelt und gelöst. In diesen drei Fällen werden für mehrere Grade der Reaktion dimensionslose Kurven angegeben.

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПОВЕРХНОСТНОЙ РЕАКЦИИ: ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА РОЗНЕРА НА СЖИМАЕМЫЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ. СТРУЙНОЕ ОБТЕКАНИЕ СТЕНКИ

Аннотация — Для расчета пристеночной концентрации вдуваемой жидкости, которая диффундирует в пограничный слой, образующийся на плоской пластине в изотермических несжимаемых условиях, Рознером был предложен квазистационарный метод. В настоящей работе этот метод обобщен на случай однородного потенциального течения изотермической сжимаемой жидкости. Представлены также решения для случая неизоотермического струйного обтекания стенки, а также выведено новое интегральное уравнение в безразмерном виде и дано его решение. Для всех трех случаев представлены безразмерные кривые для реакций различных порядков.